

---

# Počítačová grafika III – Path tracing II

---

Jaroslav Křivánek, MFF UK

[Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz](mailto:Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz)

---

# Opakování

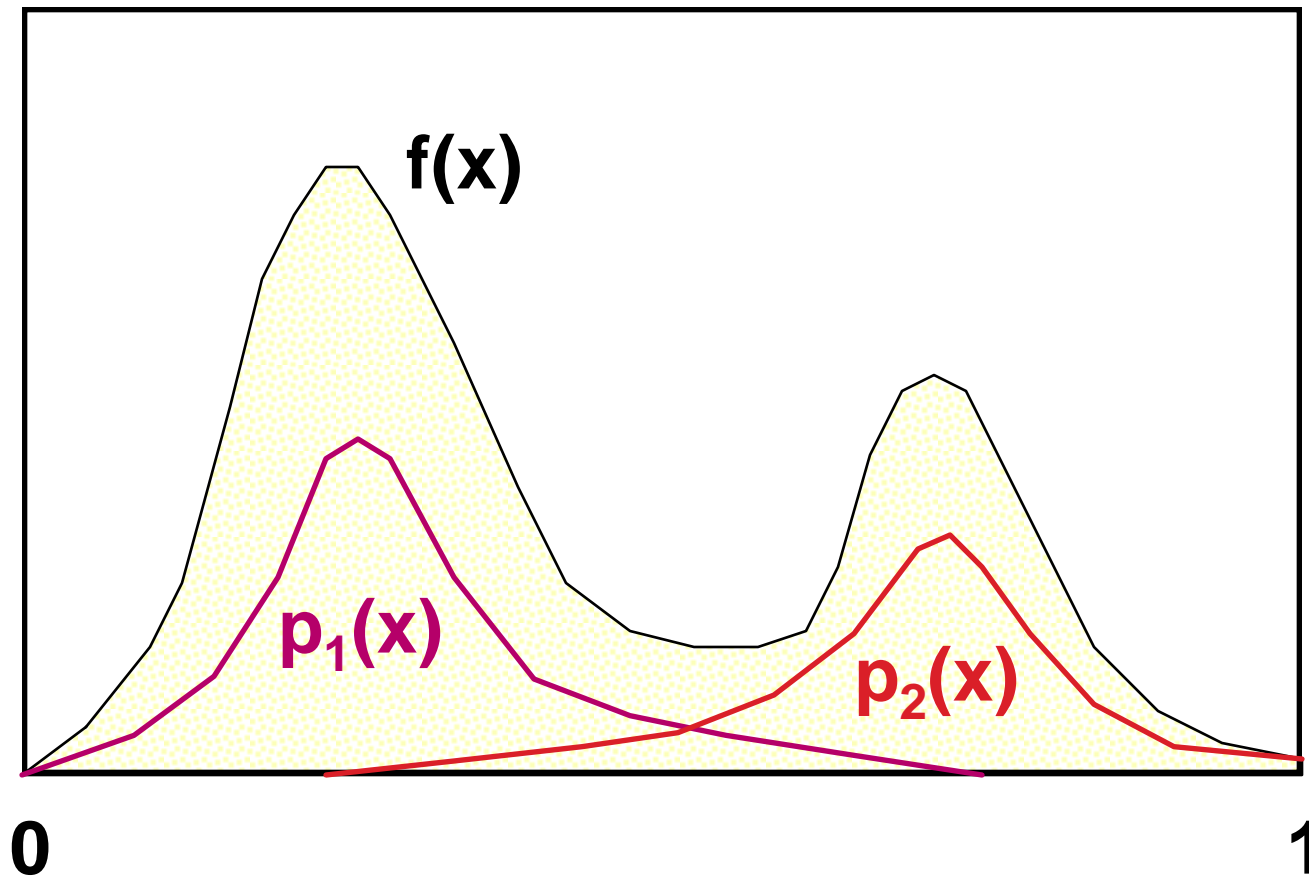
---

# Path Tracing – Implicitní osvětlení

```
getLi(x, w)
{
    Color thrput = (1,1,1)
    Color accum = (0,0,0)
    while(1)
    {
        hit = NearestIntersect(x, w)
        if no intersection
            return accum + thrput * bgRadiance(x, w)
        if isOnLightSource(hit)
            accum += thrput * Le(hit.pos, -w)
        ρ = reflectance(hit.pos, -w)
        if rand() < ρ // russian roulette - survive (reflect)
            wi := SampleDir(hit)
            thrput *= fr(hit.pos, wi, -w) * dot(hit.n, wi) / (ρ*pdf(wi))
            x := hit.pos
            w := wi
        else // absorb
            break;
    }
    return accum;
}
```

# Multiple Importance Sampling

(Veach & Guibas, 95)



# Vyrovnaná heuristika (Balance heurist.)

- Výsledný estimátor (po dosazení vah)

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f(X_{i,j})}{\sum_k n_k p_k(X_{i,j})}$$

- příspěvek vzorku nezávisí na tom, ze které byl pořízen techniky (tj. pdf)

---

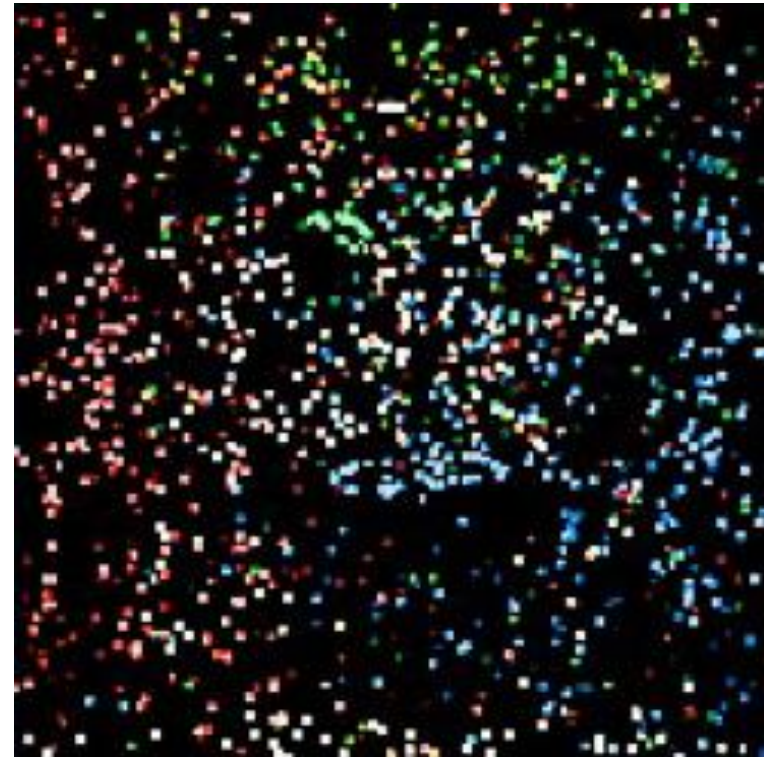
# **Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS**

---

# Problém: Najde path tracer světlo?



reference



simple path tracer  
(150 cest na pixel)

Images: Alexander Wilkie

# Přímé osvětlení

- Zapomeňme na chvíli na path tracing
- Řešíme jednodušší problém:

## **přímé osvětlení z daného zdroje světla**

tj. odražená radiance z bodu  $\mathbf{x}$  způsobená osvětlením ze zdroje světla



# Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

1. **Vzorkování BRDF**
2. **Vzorkování plochy světél**

# Dvě vzorkovací techniky

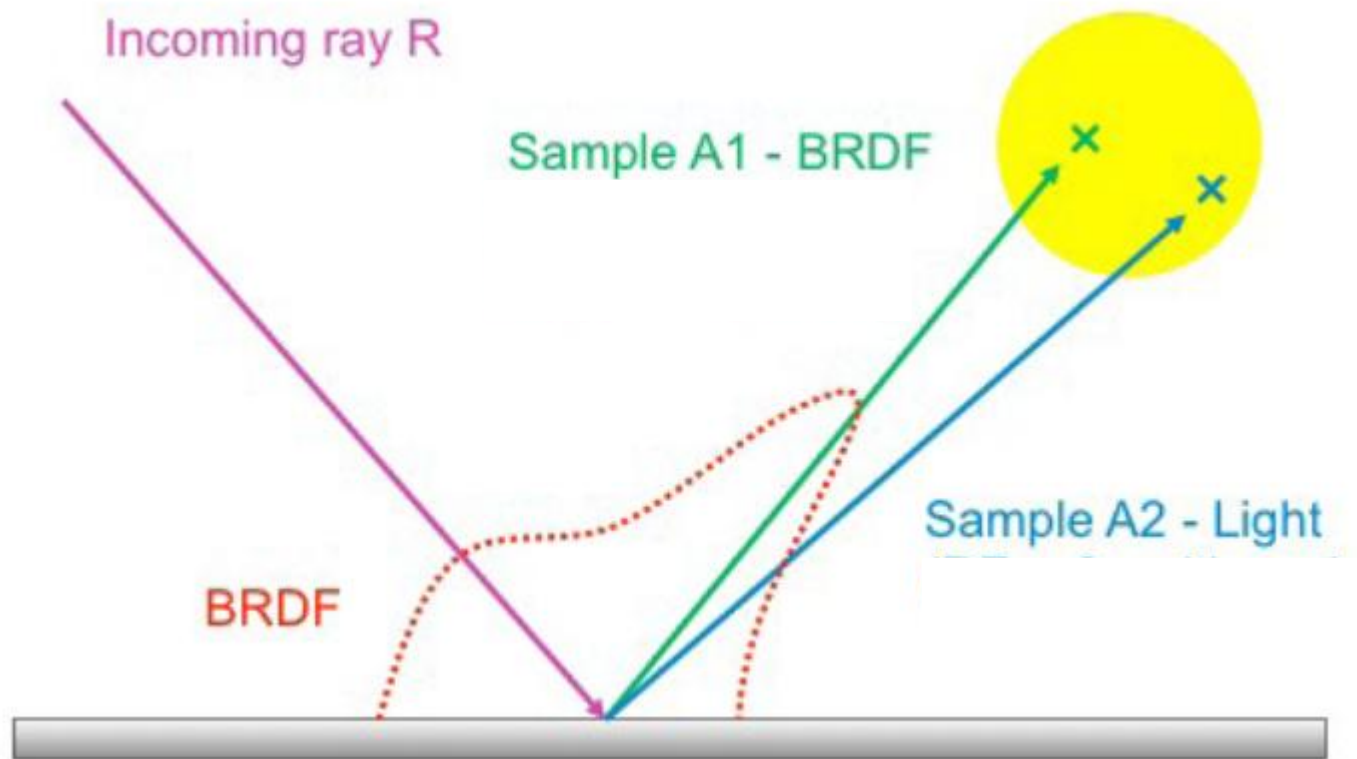


Image: Alexander Wilkie

# Přímé osvětlení: Vzorkování BRDF

- **Formulace integrálu** (integrování přes hemisféru nad  $\mathbf{x}$ )

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_e(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

- **MC estimátor**

- Generujeme náhodný směr  $\omega_{i,k}$  podle hustoty  $p$
- Vrhne paprsek z  $\mathbf{x}$  ve směru  $\omega_{i,k}$
- Pokud protne nějaký zdroj světla, přičteme  $L_e(\cdot) f_r(\cdot) \cos/\text{pdf}$

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_e(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_{i,k}), -\omega_{i,k}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_{i,k} \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_{i,k}}{p(\omega_{i,k})}$$

# Přímé osvětlení: Vzorkování povrchu zdrojů světla

- **Formulace integrálu** (integrování přes plochu zdroje)

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_A L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) dA_y$$

- **MC estimátor**

- Generujeme náhodnou pozici  $\mathbf{y}_k$  na zdroji
- Testujeme viditelnost mezi  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$
- Pokud  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})=1$ , přičteme  $|A| L_e(\mathbf{y}) f_r(\cdot) \cos/\text{pdf}$

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^N L_e(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x})$$

# Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

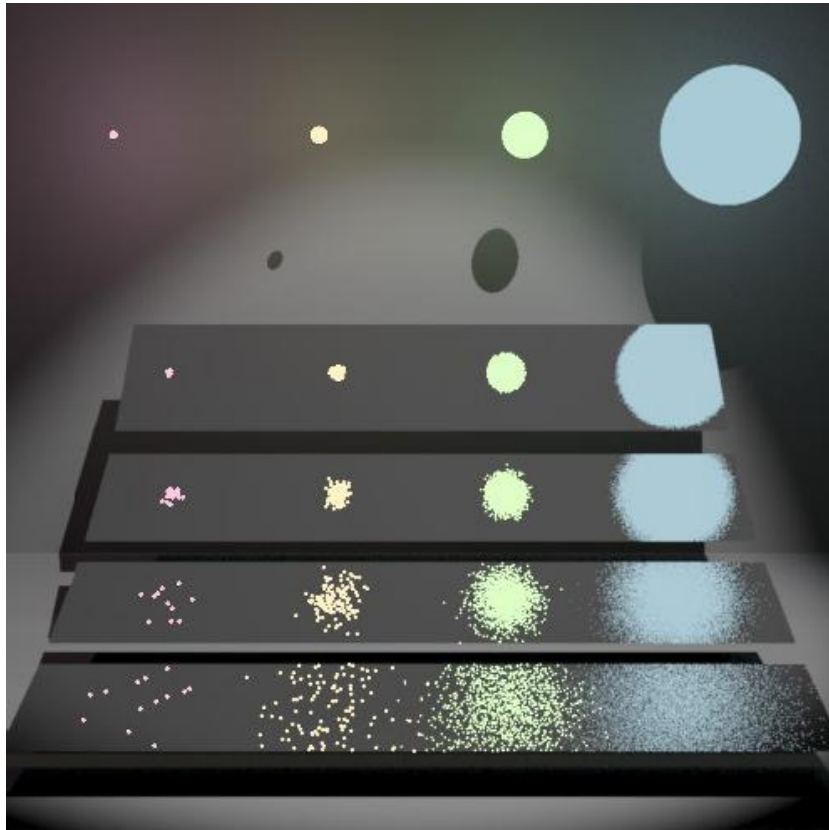
## ■ Vzorkování BRDF

- Výhodnější pro velké zdroje světla
- Pro malé zdroje světla je pravděpodobnost zásahu zdroje velmi malá -> vysoký rozptyl, šum

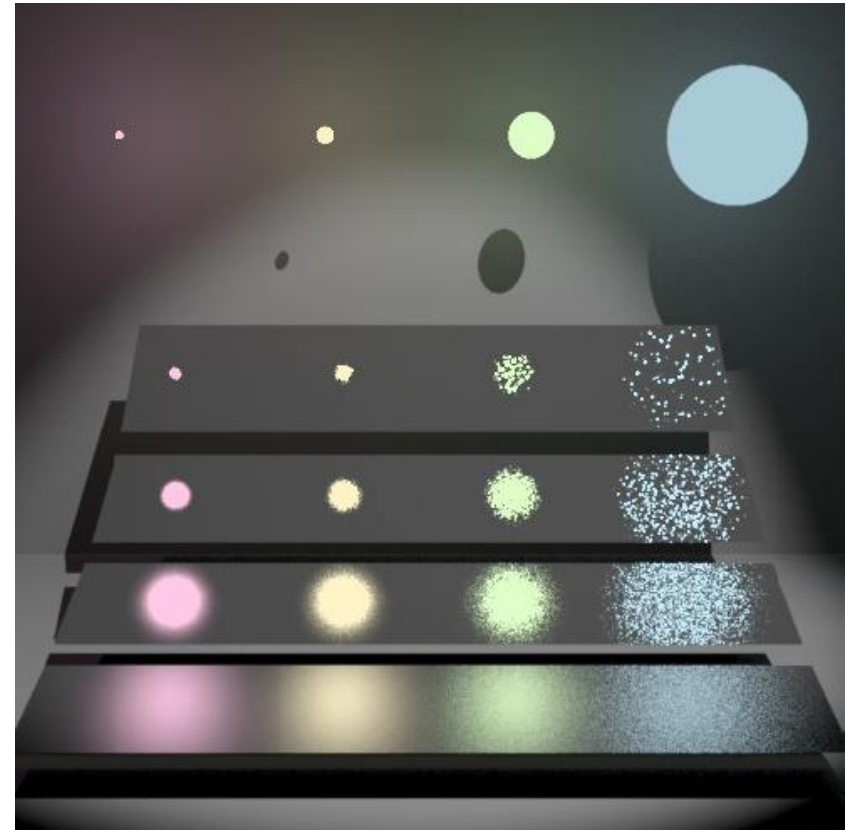
## ■ Vzorkování světel

- Výhodnější pro malé zdroje
- Jediná možná alternativa pro bodové zdroje
- Pro velké zdroje mnoho vzorků mimo lalok BRDF -> vysoký rozptyl, šum

# Přímé osvětlení: Dva možné přístupy



Vzorkování BRDF



Vzorkování světel

Images: Eric Veach

# Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

- Kterou techniku zvolit?
  - **OBĚ**
- **Problém**
  - Obě techniky odhadují stejnou veličinu  $L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$ 
    - Pouhým sečtením bychom dostali odhad  $2 L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$  - špatně
  - Potřebuji vážený průměr příspěvků obou technik
  - **Jak zvolit váhy?**

# Jak zvolit váhy?

- **Multiple importance sampling** (Veach & Guibas, 95)
- Váhy závislé na pdf vzorků
- Minimalizuje rozptyl kombinovaného estimátoru
- Téměř optimální řešení

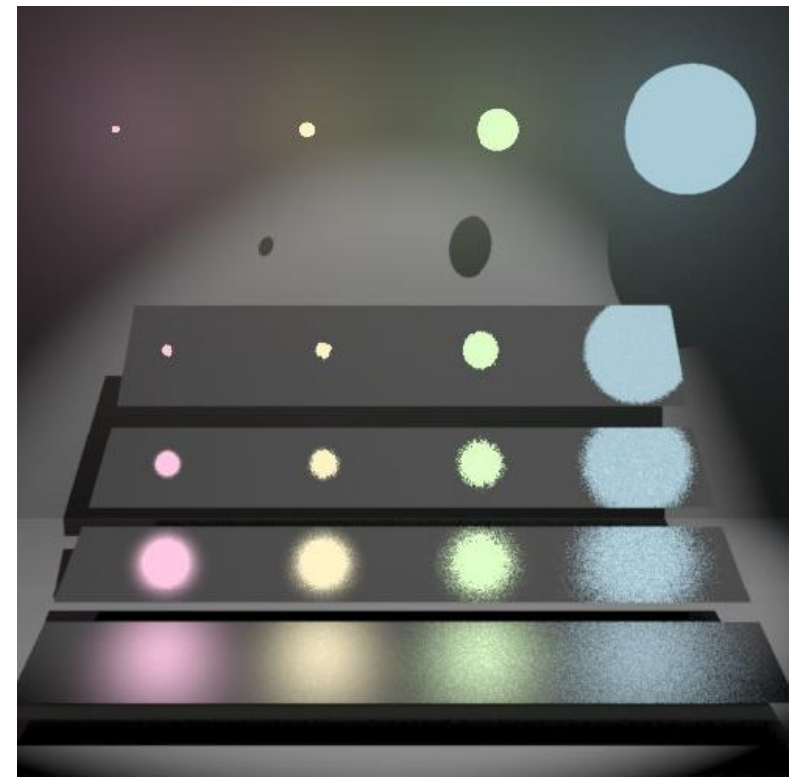


Image: Eric Veach



# Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS

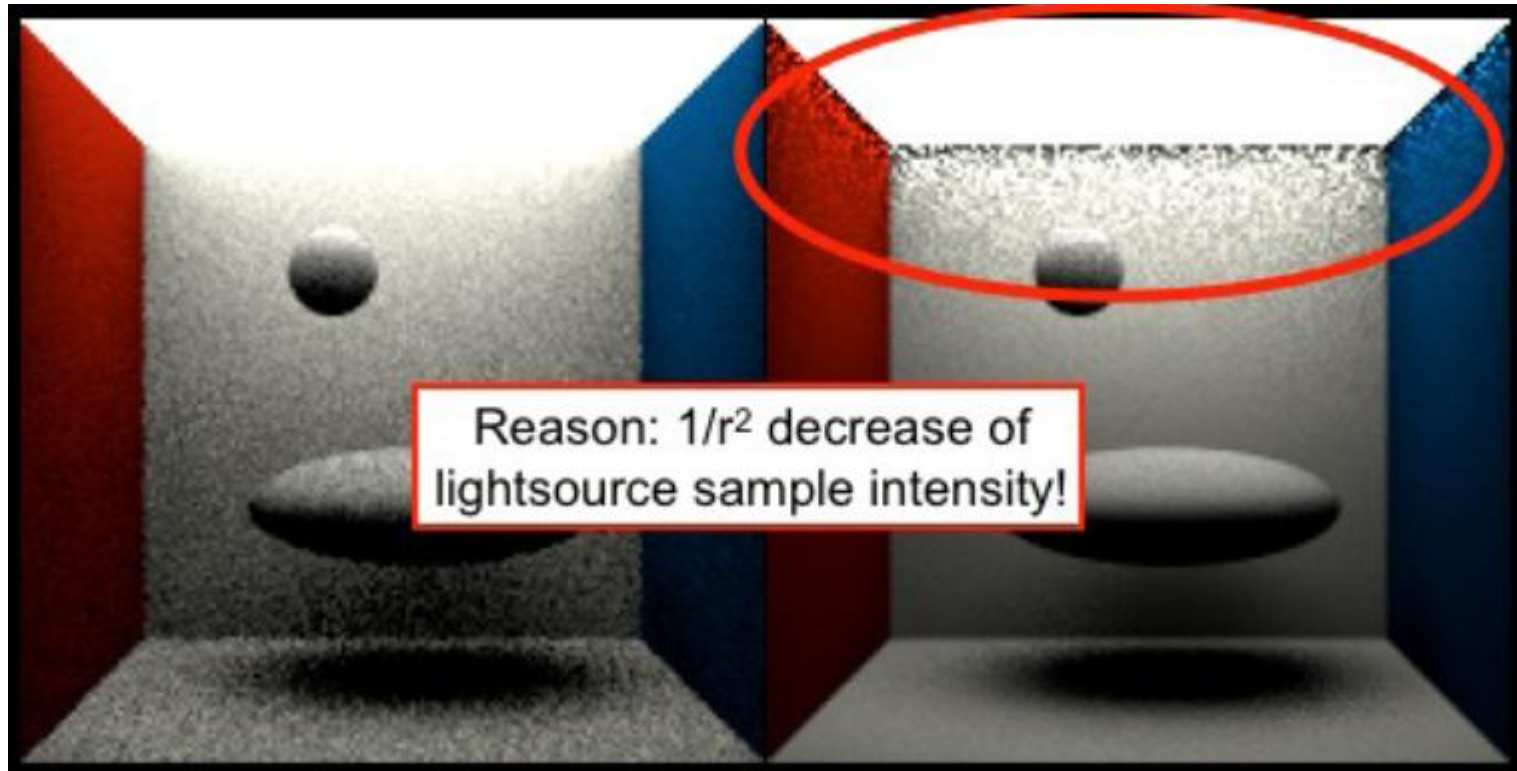
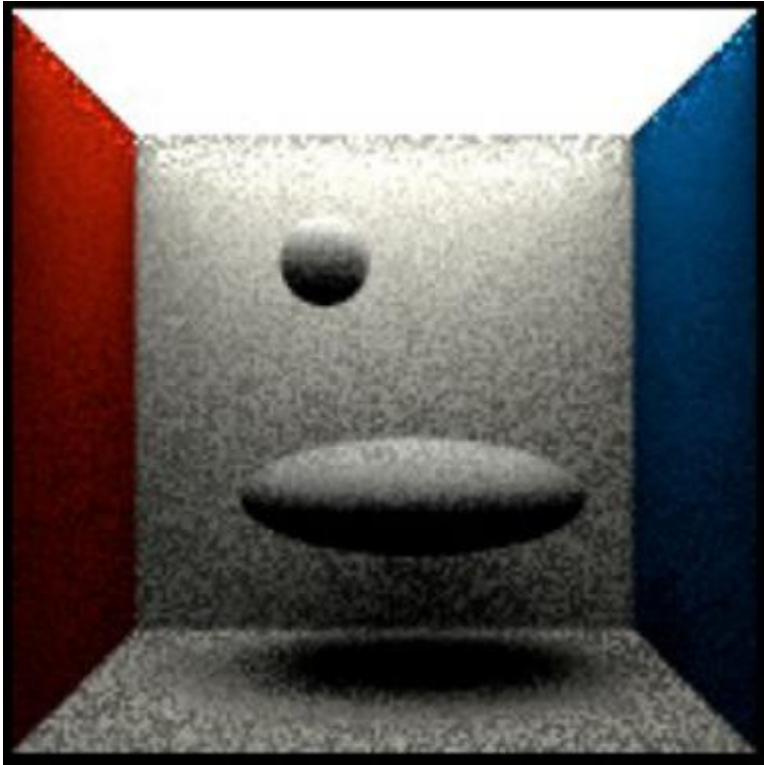


Image: Alexander Wilkie

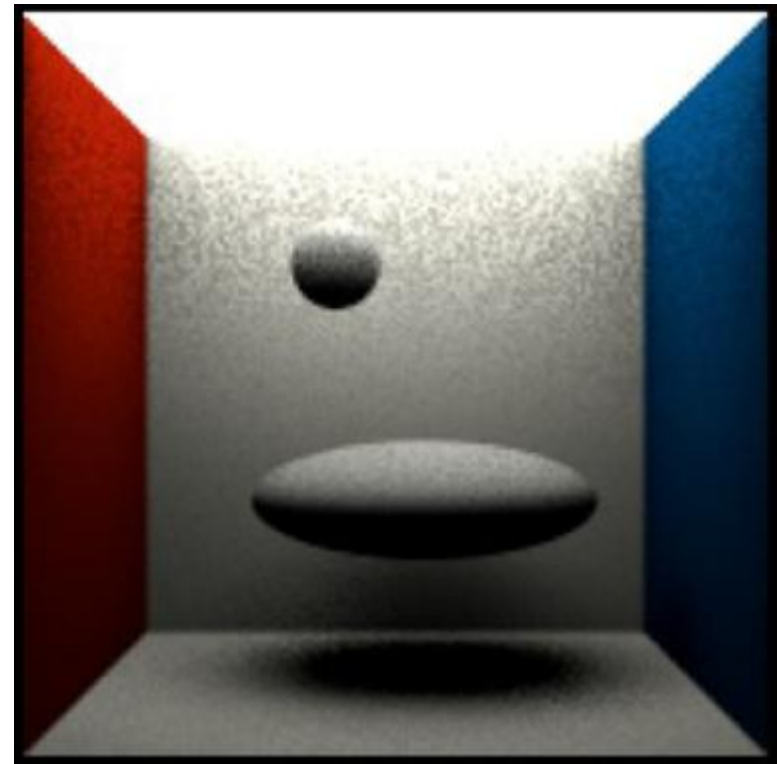
**Vzorkovací technika (pdf)  $p_1$ :  
Vzorkování BRDF**

**Vzorkovací technika (pdf)  $p_2$ :  
Vzorkování plochy světla**

# Kombinace



**Aritmetický průměr**  
Zachovává špatné vlastnosti  
obou technik



**Vyrovnaná heuristika**  
Bingo!!!

Image: Alexander Wilkie

# Dvě vzorkovací techniky

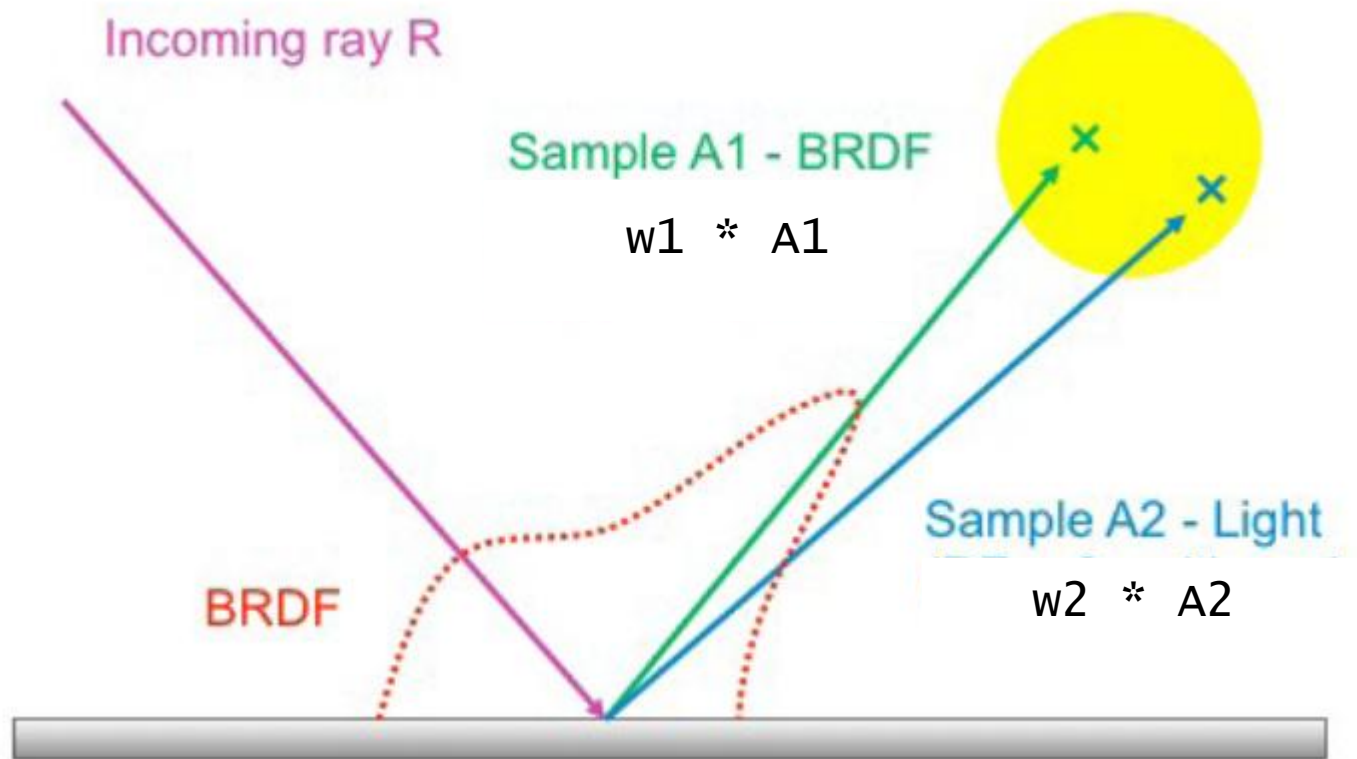


Image: Alexander Wilkie

# Výpočet vah

Váha vzorku z  
BRDF vzorkování

$$w_1(\omega_j) = \frac{p_1(\omega_j)}{p_1(\omega_j) + p_2(\omega_j)}$$

Hustota pravděpodobnosti  
vzorkování z BRDF

**Hustota, s jakou by byl směr  $\omega_j$  vygenerován,  
kdybychom byli použili vzorkování plochy zdroje**

# Hustoty pravděpodobnosti

- **Vzorkování BRDF:  $p_1(\omega)$**

- Závisí na BRDF, např. pro Lambertovskou BRDF

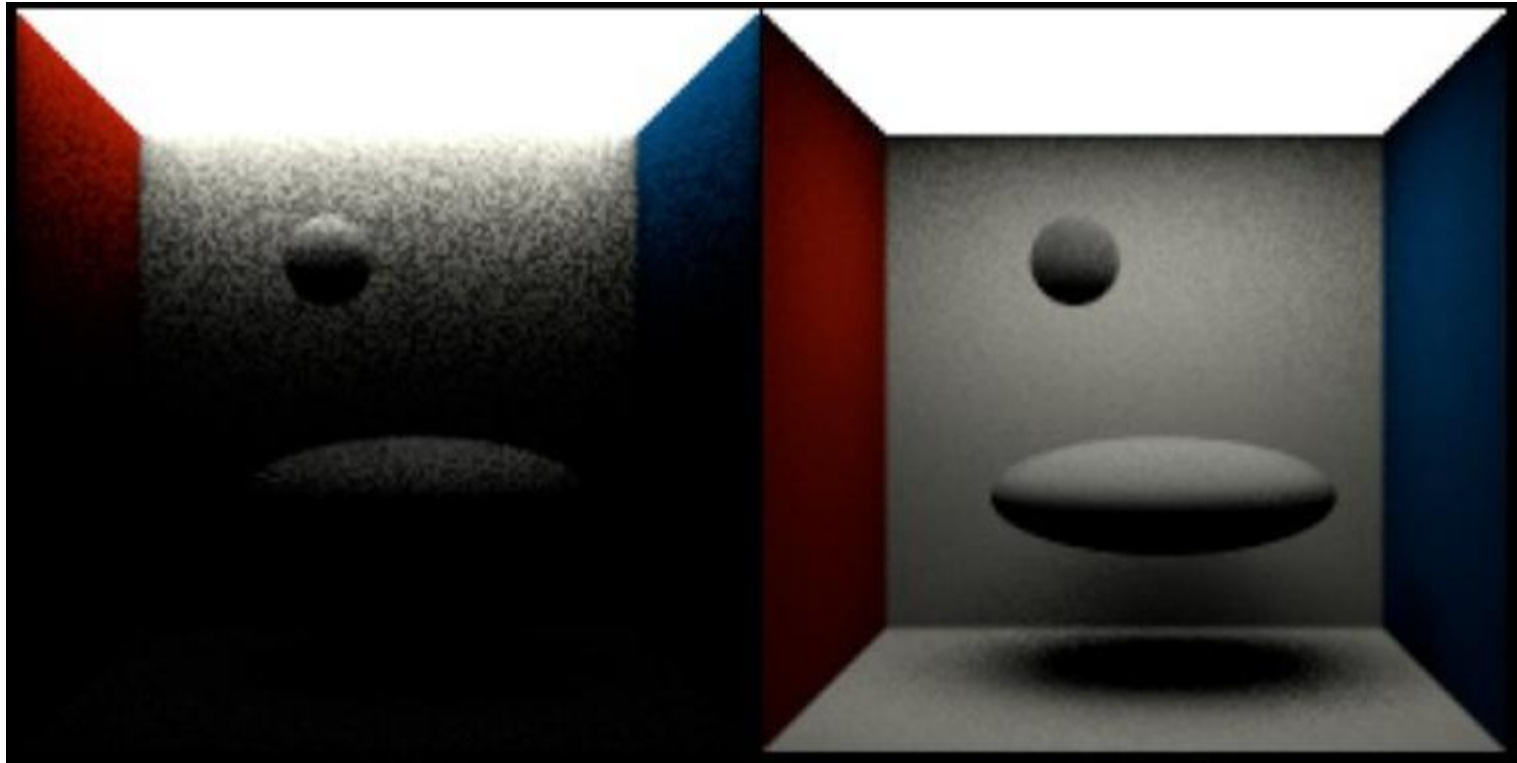
$$p_1(\omega) = \frac{\cos \theta_{\mathbf{x}}}{\pi}$$

- **Vzorkování plochy zdroje:  $p_2(\omega)$**

$$p_2(\omega) = \frac{1}{|A|} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\cos \theta_{\mathbf{y}}}$$

↖ **Převodní hustoty  $1/|A|$  z plošné míry (dA) do míry prostorového úhlu (d $\omega$ )**

# Příspěvky vzorkovacích technik



**w1 \* vzorkování BRDF**

**w2 \* vzorkování zdroje**

Image: Alexander Wilkie

---

# **Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS v path traceru**

---

# Použití MIS v path traceru

- Pro každý vrchol cesty generované z kamery:
  - Generování explicitního stínového paprsku pro techniku  $p_2$  (vzorkování plochy zdroje)
  - Sekundární paprsek pro techniku  $p_1$  (vzorkování zdroje)
    - Sdílený pro výpočet **přímého** i **nepřímého** osvětlení
    - Pouze na přímé osvětlení se aplikuje MIS váha (nepřímé osvětlení se připočte celé)
  - Při výpočtu MIS vah je potřeba vzít v úvahu pravděpodobnost ukončení cesty (ruská ruleta)



# Více zdrojů světla

- Možnost 1:
  - Stínový paprsek pro náhodný bod na každém zdroji světla
- Možnost 2 (často lepší):
  - Náhodný výběr zdroje (s p-ností podle výkonu)
  - Stínový paprsek k náhodně vybranému bodu na vybraném zdroji
- Pozor: Pravděpodobnost výběru zdroje ovlivňuje hustoty (a tedy i váhy) v MIS

---

# Generování vzorků z distribuce

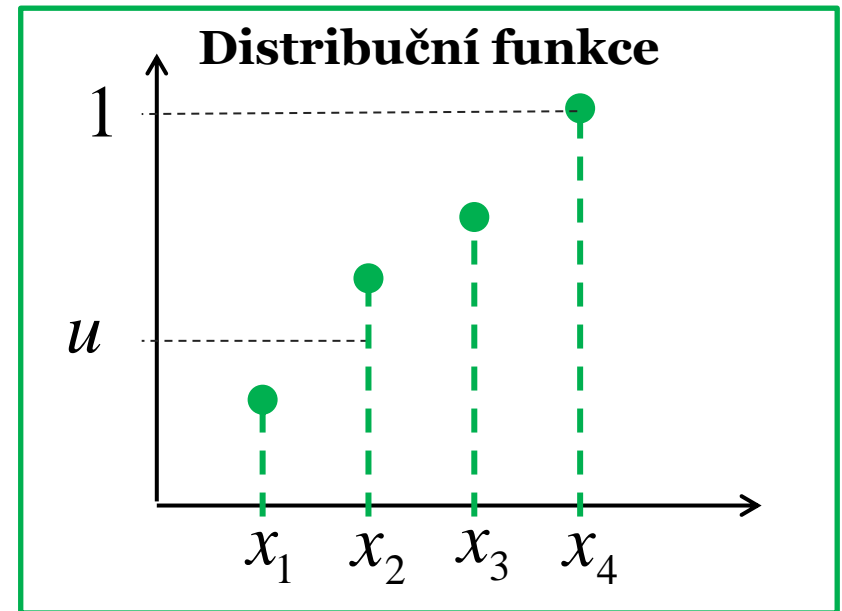
---

# 1D diskrétní náhodná veličina

- Dána p-nostní fce  $p(i)$ , distribuční fce  $P(i)$
- Postup
  1. Vygeneruj  $u$  z  $R(0,1)$
  2. Vyber  $x_i$  pro které

$$P(i-1) < u \leq P(i)$$

(definujeme  $P(0) = 0$ )



- Nalezení  $i$  se provádí půlením intervalu

# 2D diskretní náhodná veličina

- Dána p-nostní fce  $p_{I,J}(i, j)$
- Možnost 1:
  - Interpretovat jako 1D vektor pravděpodobností
  - Vzorkovat jako 1D distribuci

# 2D diskretní náhodná veličina

## ■ Možnost 2 (lepší)

1. „Řádek“  $i_{\text{sel}}$  vybrat podle marginálního rozdělení, popsaného 1D p-nostní fcí

$$p_I(i) = \sum_{j=1}^{n_j} p_{I,J}(i, j)$$

2. „Sloupec“  $j_{\text{sel}}$  vybrat podle podmíněného rozdělení příslušejícího vybranému „řádku“  $i_{\text{sel}}$

$$p_{J|I}(j | I = i_{\text{sel}}) = \frac{p_{I,J}(i_{\text{sel}}, j)}{p_I(i_{\text{sel}})}$$

# Vzorkování 1D spojité náhodné veličiny

- Transformací rovnoměrné náhodné veličiny
- Zamítací metoda (rejection sampling)

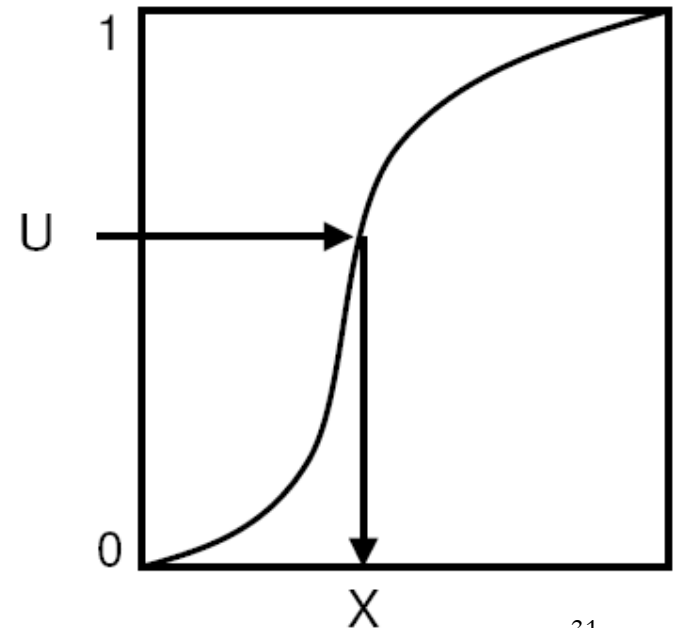
# Vzorkování 1D spojité náhodné veličiny transformací

- Je-li  $U$  je náhodná veličina s rozdělením  $R(0,1)$ , pak náhodná veličina  $X$

$$X = P^{-1}(U)$$

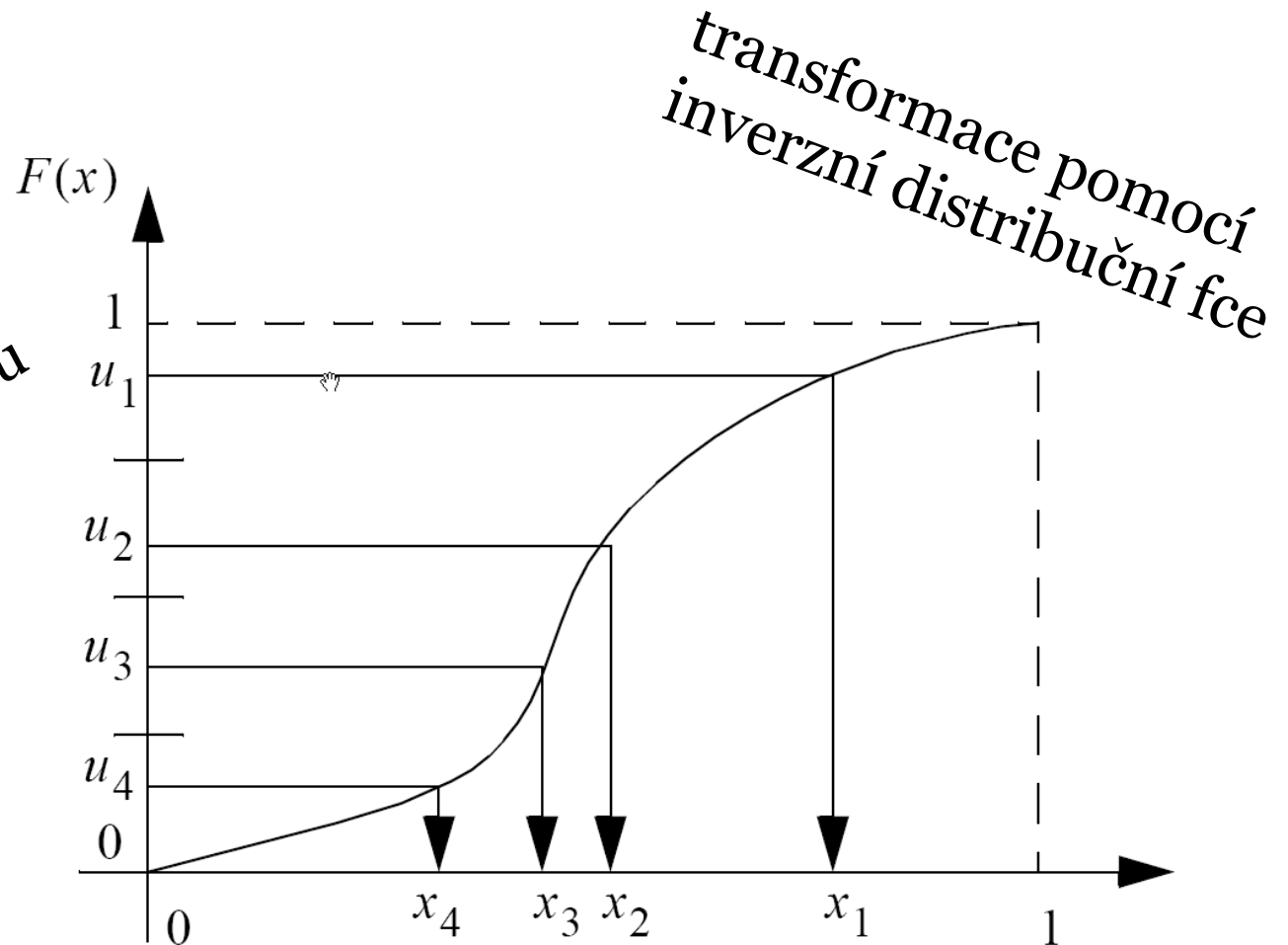
má rozdělení popsané distribuční funkcí  $P$ .

- Pro generování vzorků podle hustoty  $p$  potřebujeme
  - Spočítat cdf  $P(x)$  z pdf  $p(x)$
  - Spočítat inverzní funkci  $P^{-1}(x)$



# Kombinace vzorkování po částech s transformační metodou

stratifikace v prostoru  
náhodných čísel





# Vzorkování 1D spojité náhodné veličiny zamítací metodou

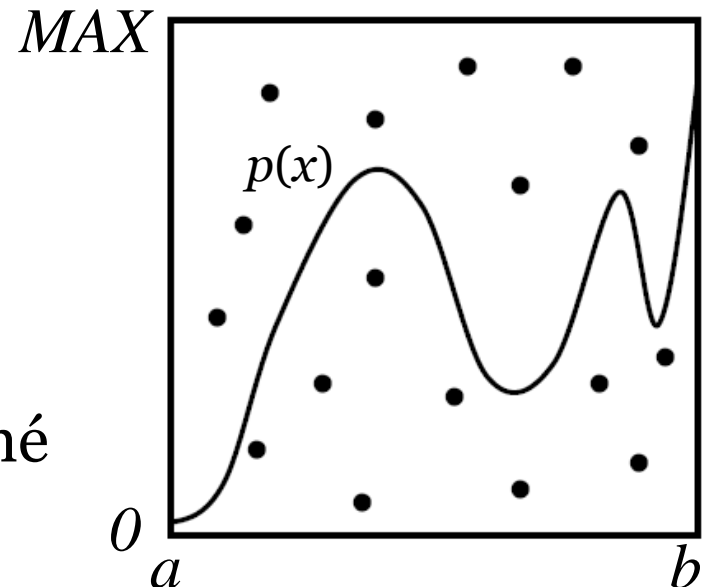
## ■ Algoritmus

- ❑ Vyber náhodné  $u_1$  z  $R(a, b)$
- ❑ Vyber náhodné  $u_2$  z  $R(0, MAX)$
- ❑ Přijmi vzorek, pokud  $p(u_1) > u_2$

## ■ Přijaté vzorky mají rozložení dané hustotou $p(x)$

## ■ Účinnost = % přijatých vzorků

- ❑ Plocha funkce pod křivkou / plocha obdélníka
- ❑ Transformační metoda vždy efektivnější (ale vyžaduje integrovat hustotu a invertovat distribuční fci)



# Vzorkování 2D spojité náhodné veličiny

- Jako pro 2D diskrétní veličinu
- Dána sdružená hustota  $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_{Y|X}(y | x)$
- Postup
  1. Vyber  $x_{\text{sel}}$  z **marginální hustoty**

$$p_X(x) = \int p_{X,Y}(x, y) dy$$

2. Vyber  $y_{\text{sel}}$  z **podmíněné hustoty**

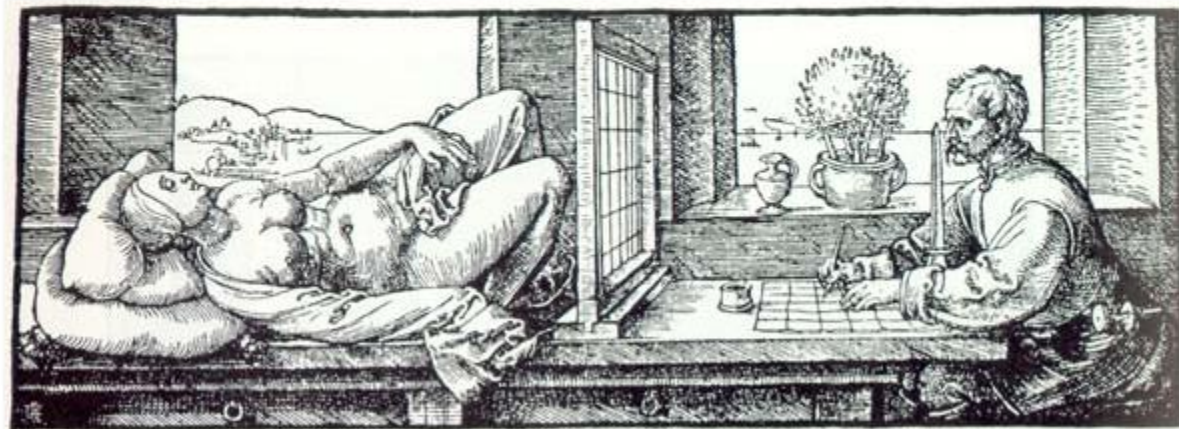
$$p_{Y|X}(y | X = x_{\text{sel}}) = \frac{p_{X,Y}(x_{\text{sel}}, y)}{p_X(x_{\text{sel}})}$$

# Transformační vzorce

- P. Dutré: **Global Illumination Compendium**, <http://people.cs.kuleuven.be/~philip.dutre/GI/>

## Global Illumination Compendium

### The Concise Guide to Global Illumination Algorithms



Albrecht Dürer, *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* (Nuremberg, 1525), Book 3, figure 67.

# Importance sampling Phongovy BRDF

- Paprsek dopadne na plochu s Phongovou BRDF. Jak vygenerovat sekundární paprsek pro vzorkování nepřímého osvětlení?
- Path tracing
  - Pouze 1 sekundární paprsek – je třeba zvolit komponentu BRDF (druh interakce)
  - Postup:
    1. Vyber komponentu BRDF (difúzní odraz / lesklý odraz / lom)
    2. Vzorkuj vybranou komponentu

# Fyzikálně věrohodná Phongova BRDF

$$f_r^{\text{Phong}}(\omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{\rho_d}{\pi} + \frac{n+2}{2\pi} \rho_s \cos^n \theta_r$$

- Kde:

$$\cos \theta_r = \omega_o \cdot \omega_r$$

$$\omega_r = 2(\omega_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \omega_i$$

- Zachování energie:  $\rho_d + \rho_s \leq 1$

# Výběr interakce

```
pd = max(rhoD.r, rhoD.g, rhoD.b);  
ps = max(rhoS.r, rhoS.g, rhoS.b);  
pd /= (pd + ps);    // pravd. výběru difúzní komponenty  
ps /= (pd + ps);    // pravd. výběru lesklé komponenty
```

```
Vec3 dir, float pdf, Col brdfVal;  
if (rand(0,1) <= pd)  
    {dir, pdf, brdfVal} = sampleDiffuse();  
    return {dir, pdf * pd, brdfVal}  
  
else  
    {dir, pdf, brdfVal} = sampleSpecular();  
    return {dir, pdf * ps, brdfVal}
```

# Vzorkování difúzního odrazu

- Importance sampling s hustotou  $p(\theta) = \cos(\theta) / \pi$ 
  - $\theta$ ...úhel mezi normálou a vygenerovaným sekundárním paprskem
  - Generování směru:

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\pi r_1 & x &= \cos(2\pi r_1) \sqrt{1-r_2} \\ \theta &= \arccos(\sqrt{r_2}) & y &= \sin(2\pi r_1) \sqrt{1-r_2} \\ & & z &= \sqrt{r_2}\end{aligned}$$

- $r_1, r_2$  ... uniformní na  $\langle 0,1 \rangle$
- Zdroj: Dutre, Global illumination Compendium (on-line)
- Odvození: Pharr & Huphreys, PBRT

# sampleDiffuse()

```
// build a local coordinate frame with N = z-axis
Vec3 U = arbitraryNormal(N); // U is perpendicular to the normal N
Vec3 V = crossProd(N, U);    // orthonormal basis with N and U

// generate direction in the local coordinate frame
float r1 = rand(0,1), r2 = rand(0,1);
float sinTheta = sqrt(1 - r2);
float cosTheta = sqrt(r2);
float phi      = 2.0*PI*r1;
float pdf      = cosTheta/PI;
// convert [theta, phi] to Cartesian coordinates
Vec3 locDir (cos(phi)*sinTheta, sin(phi)*sinTheta, cosTheta);

// transform ldir to the global coordinate frame
Vec3 globDir = locDir.x * U + locDir.y * V + locDir.z * N

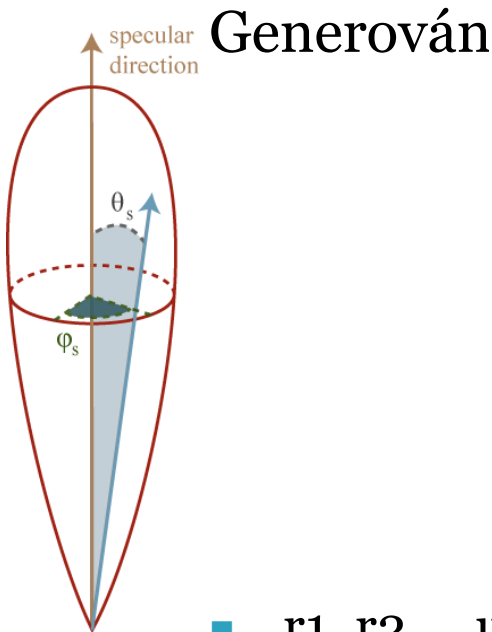
// evaluate BRDF component
Col brdfVal = rhoD / PI;

return {globDir, pdf, brdfVal}
```



# Vzorkování lesklého odrazu

- Importance sampling s hustotou  $p(\theta) = (n+1)/(2\pi) \cos^n(\theta)$ 
  - $\theta$ ...úhel mezi ideálně zrcadlově odraženým  $\omega_o$  a vygenerovaným sekundárním paprskem



$$\varphi = 2\pi r_1$$

$$\theta = \arccos\left(r_2^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$x = \cos(2\pi r_1) \sqrt{1 - r_2^{\frac{2}{n+1}}}$$

$$y = \sin(2\pi r_1) \sqrt{1 - r_2^{\frac{2}{n+1}}}$$

$$z = r_2^{\frac{1}{n+1}}$$

- $r_1, r_2$  ... uniformní na  $\langle 0,1 \rangle$

# sampleSpecular()

```
// build a local coordinate frame with R = z-axis
Vec3 R = 2*dot(N,wi)*N - wi;           // ideal reflected direction
Vec3 U = arbitraryNormal(R);          // U is perpendicular to R
Vec3 V = crossProd(R, U);             // orthonormal basis with R and U

// generate direction in local coordinate frame
{Vec3 locDir, float pdf} = rndHemiCosN (n); // formulas form prev. slide

// transform locDir to global coordinate frame
Vec3 globDir = locDir.x * U + locDir.y * V + locDir.z * R

// return zero BRDF value if the generated direction is
// under the tangent plane
float cosThetaIn = dot(N, globDir);
if(cosThetaIn <= 0) return {globDir, pdf, Col(0)};

// evaluate the BRDF component
Col brdfVal = rhoS * (n+2)/(PI*2) * pow(locDir.z, n); //ldir.z = cosThetaR

return {globDir, pdf, brdfVal}
```

# Alternativní strategie pro výběr komponenty BRDF

- Předchozí příklad vybere komponentu podle odrazivosti  $\rho$
- Druhá možnost (embree)
  1. Vyber směr podle každé BRDF komponenty
  2. Vyber komponentu s p-ností danou hodnotou BRDF komponenty ve vygenerovaném směru
- Nepotřebuje odrazivosti  $\rho$  komponenty
- Může být neefektivní pro mnoho BRDF komponent

---

# Image-based lighting

---

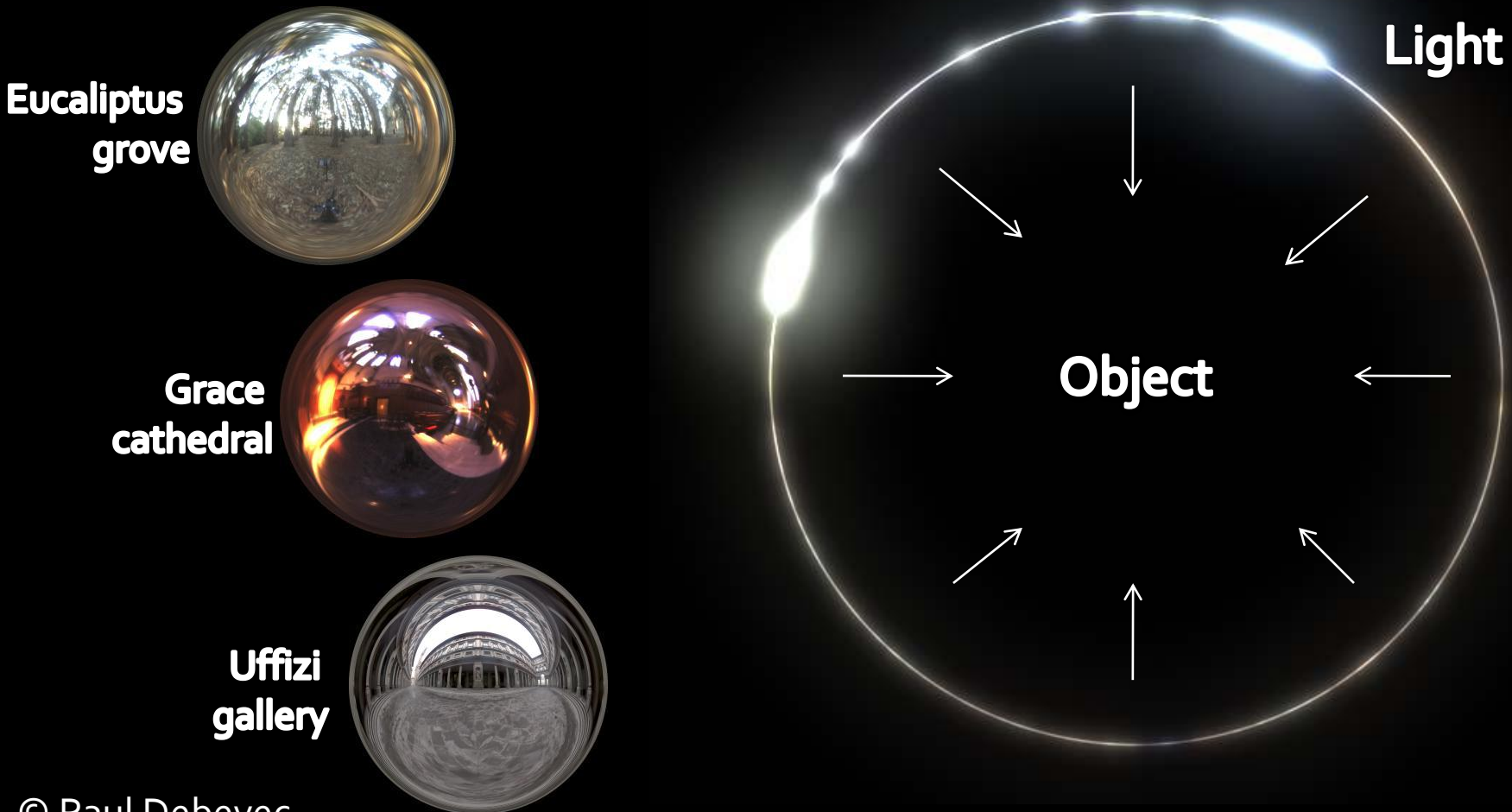
# Image-based lighting

---

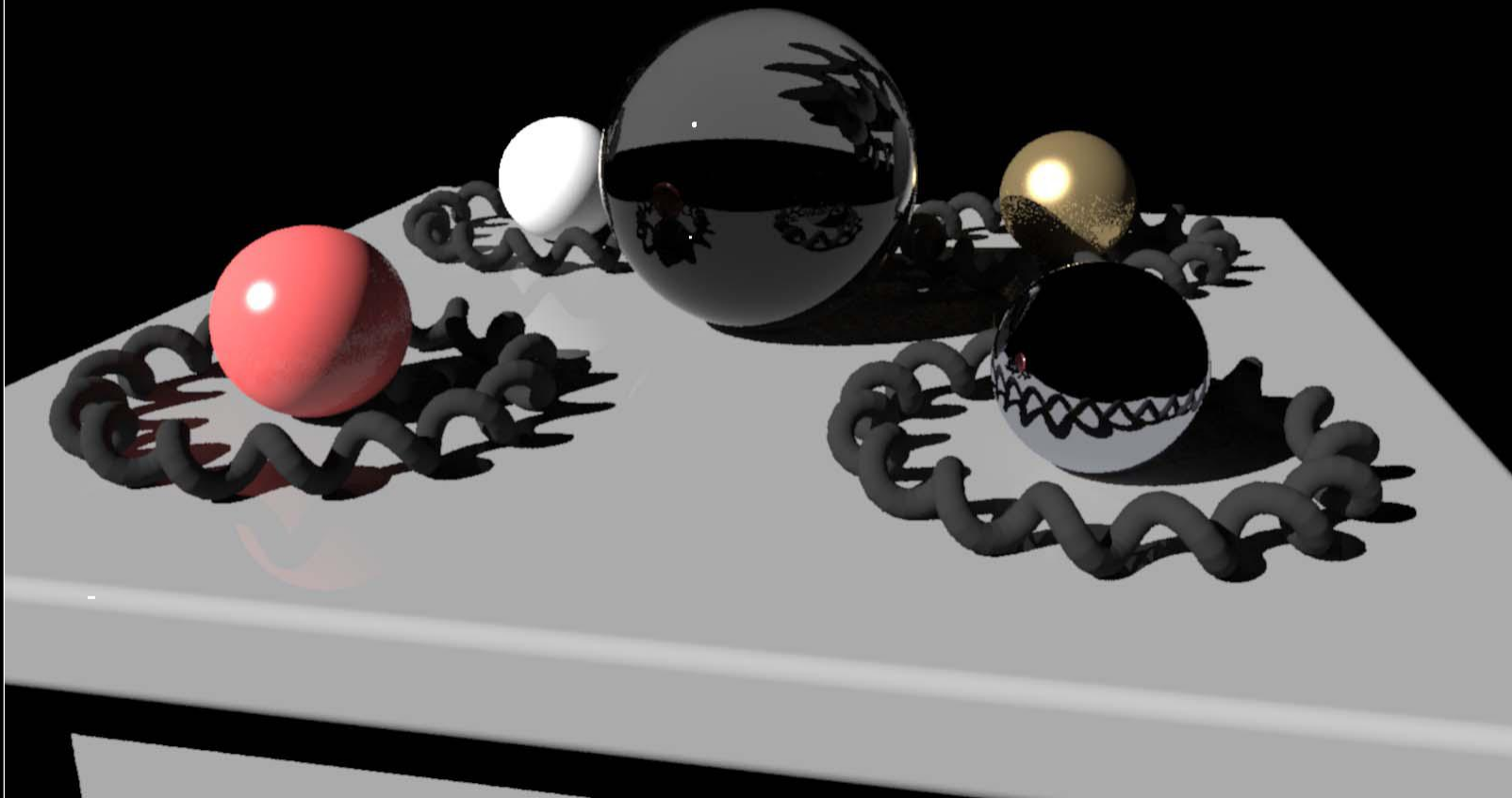
- Introduced by Paul Debevec (Siggraph 98)
- Routinely used for special effects in films & games

# Image-based lighting

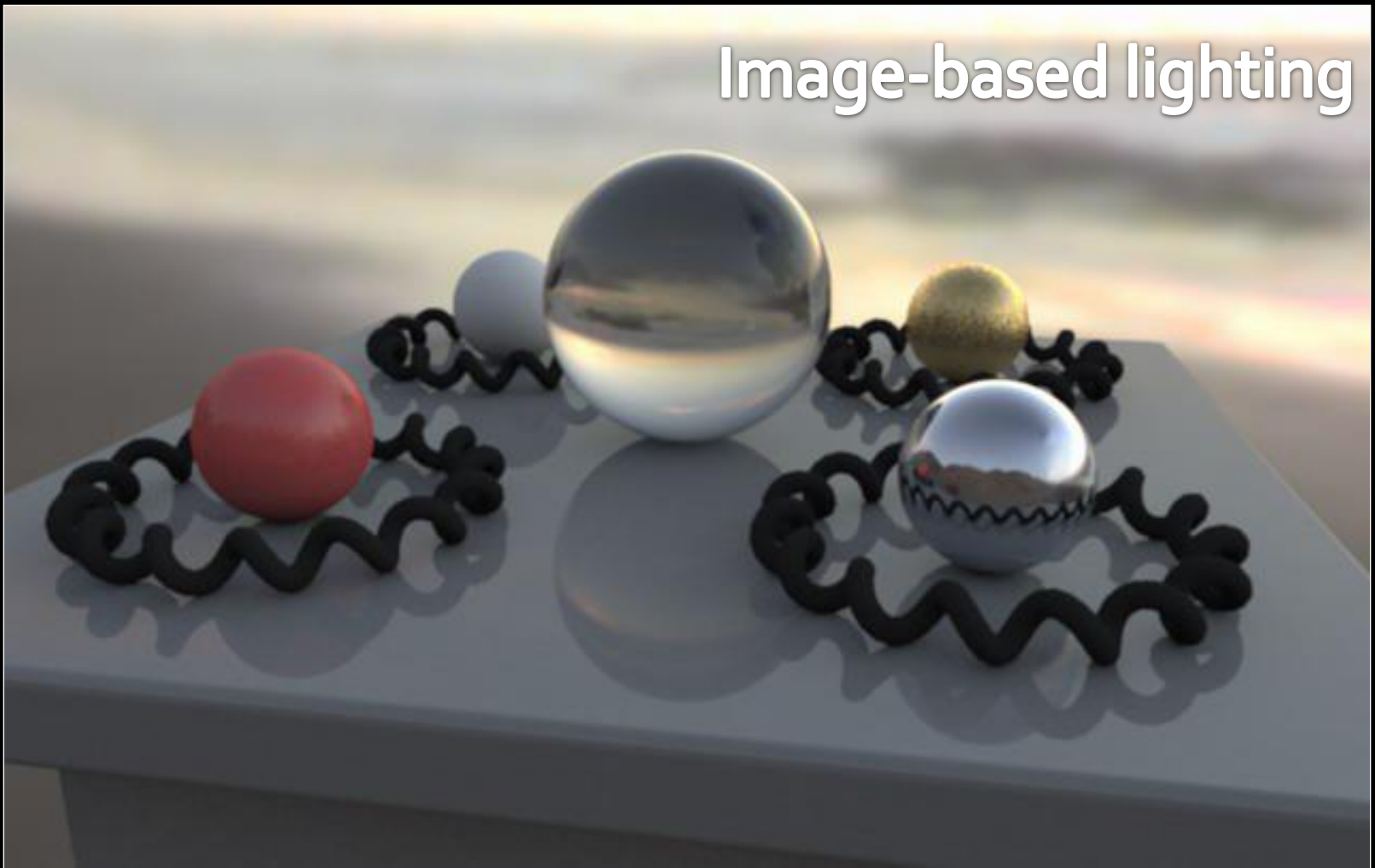
- Illuminating CG objects using measurements of real light (=light probes)



# Point lighting

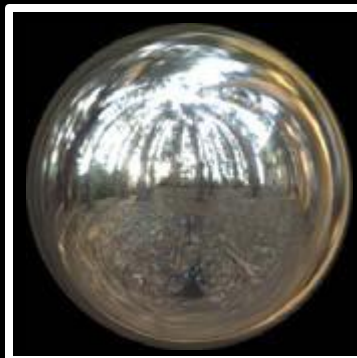
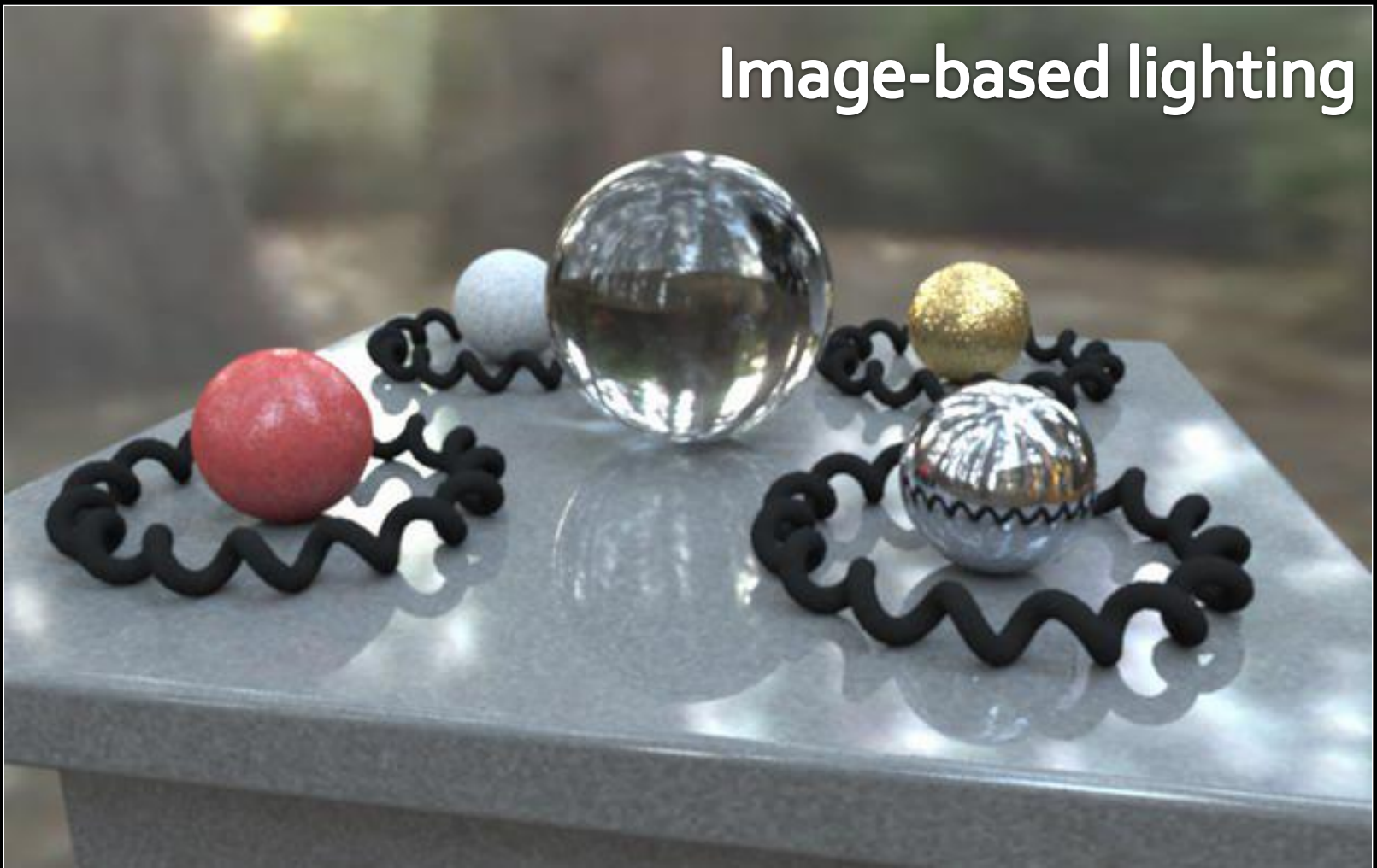


# Image-based lighting

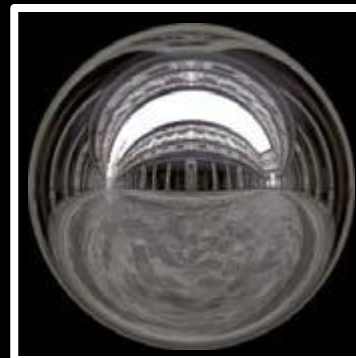
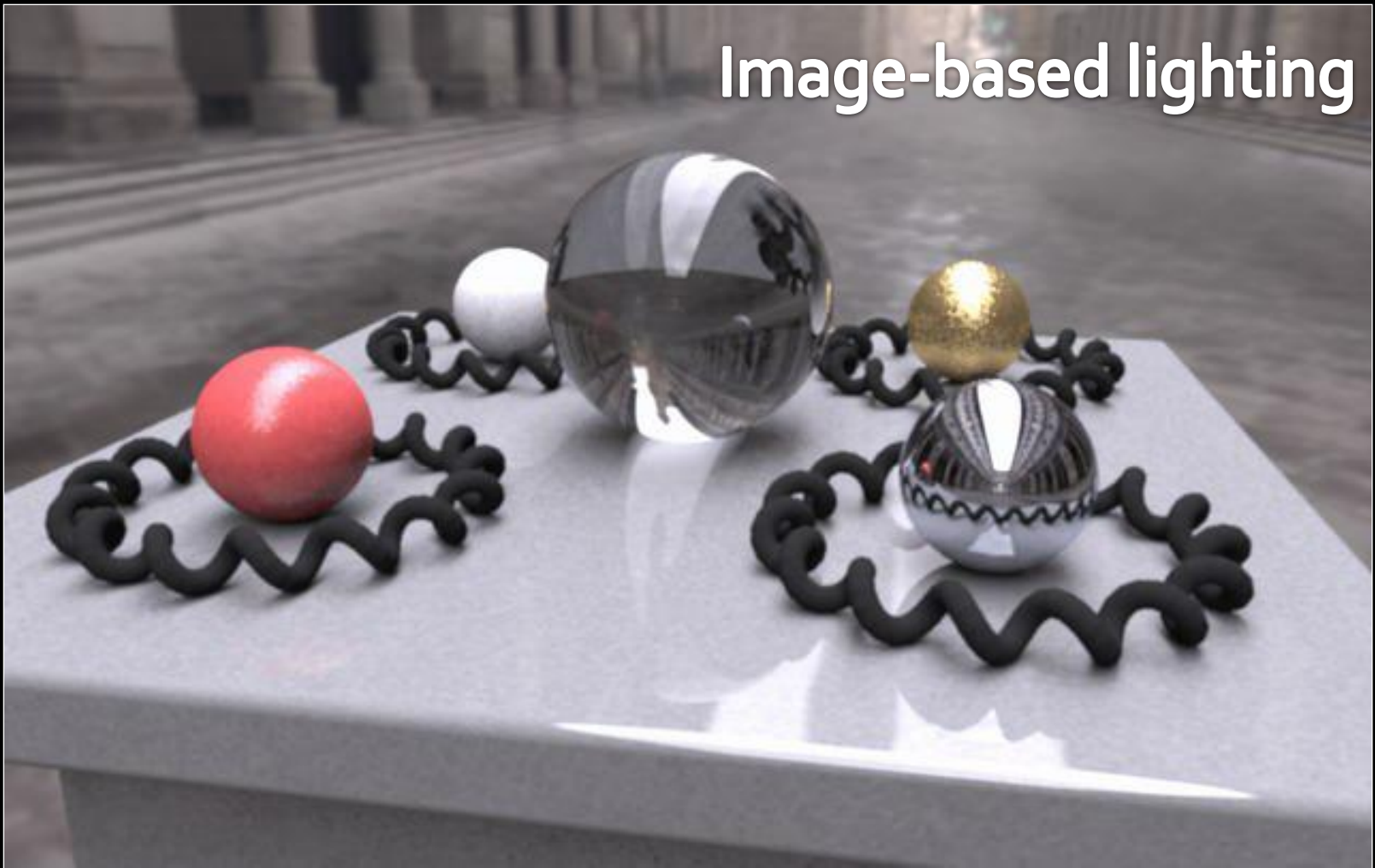




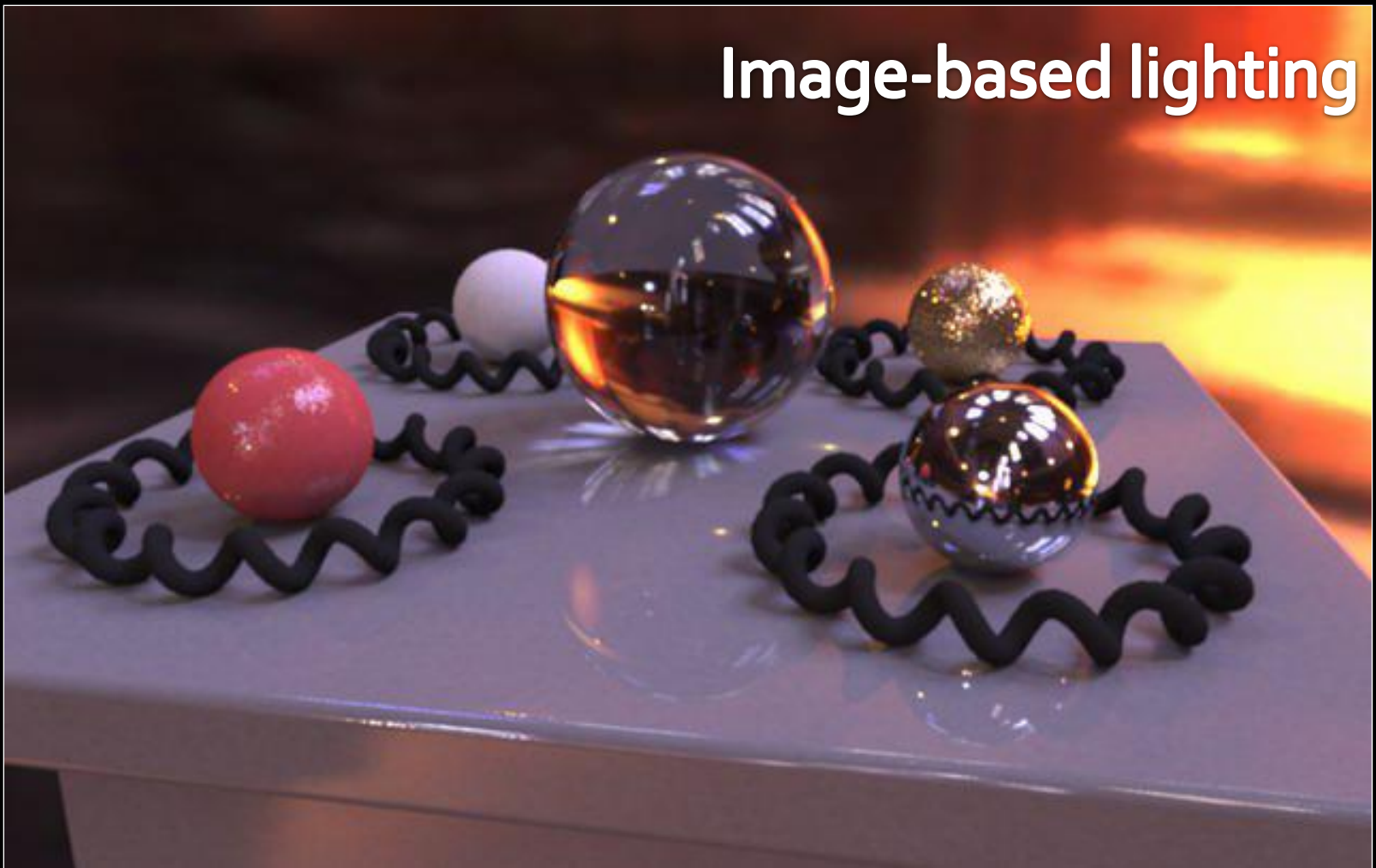
# Image-based lighting



# Image-based lighting



# Image-based lighting



# Mapping

Eucalyptus grove



Eucalyptus Grove Light Probe  
©1999 Paul Debevec  
<http://www.debevec.org/Probes>

Grace cathedral



Grace Cathedral Light Probe  
©1999 Paul Debevec  
<http://www.debevec.org/Probes>

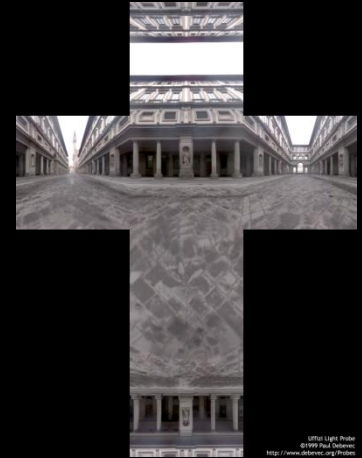
Debevec's spherical

"Latitude – longitude" (spherical coordinates)

Cube map

# Mapping

Uffizi gallery



St. Peter's Cathedral



Debevec's spherical

"Latitude – longitude" (spherical coordinates)

Cube map

# Mapping

- Mapping from direction in Cartesian coordinates to image UV.

```
float d = sqrt(dir.x*dir.x + dir.y*dir.y);  
float r = d>0 ? 0.159154943*acos(dir.z)/d : 0.0;  
u = 0.5 + dir.x * r;  
v = 0.5 + dir.y * r;
```



Quote from "<http://ict.debevec.org/~debevec/Probes/>"

*The following light probe images were created by taking two pictures of a mirrored ball at ninety degrees of separation and assembling the two radiance maps into this registered dataset. The coordinate mapping of these images is such that the center of the image is straight forward, the circumference of the image is straight backwards, and the horizontal line through the center linearly maps azimuthal angle to pixel coordinate.*

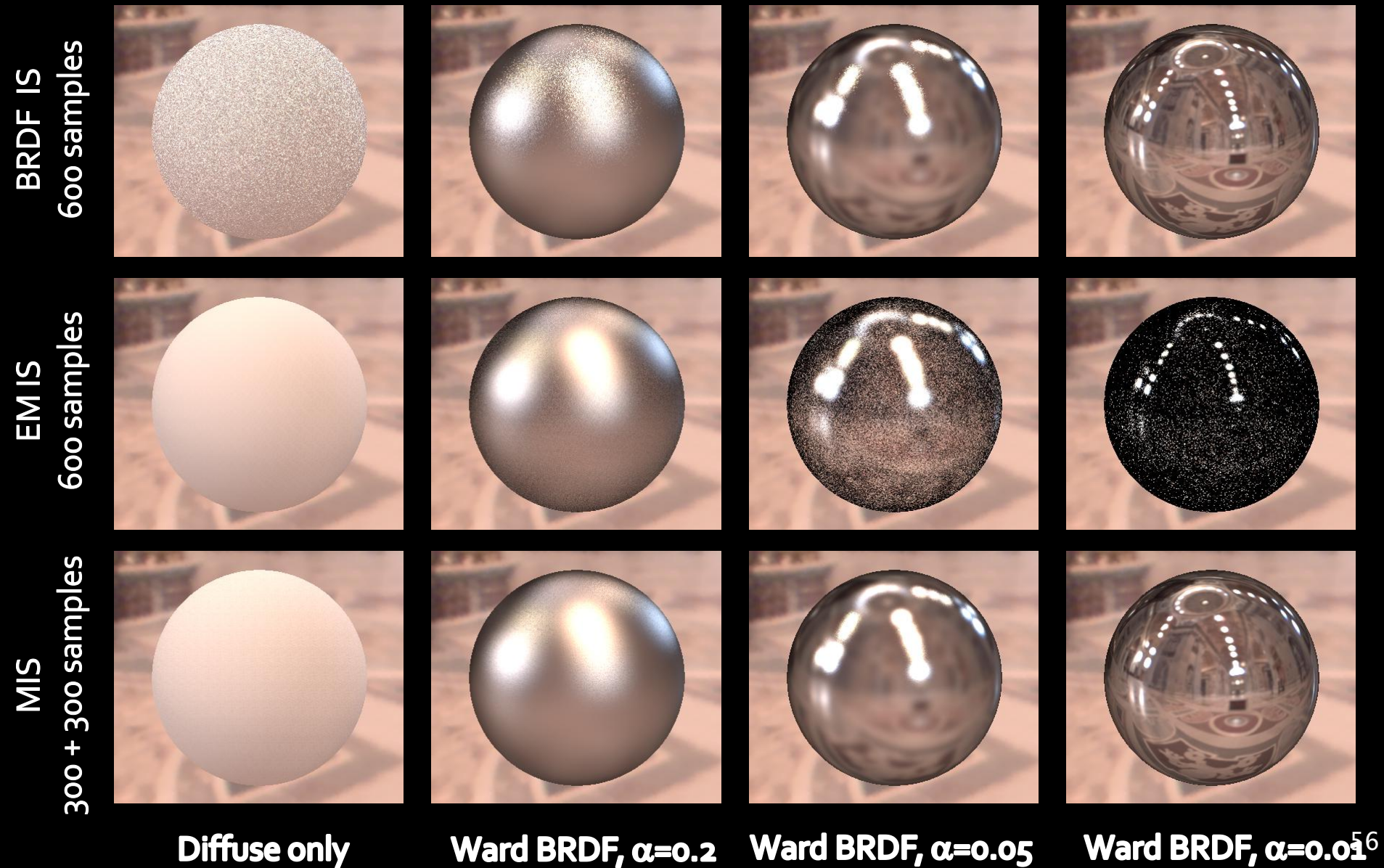
*Thus, if we consider the images to be normalized to have coordinates  $\mathbf{u}=[-1,1]$ ,  $\mathbf{v}=[-1,1]$ , we have  $\theta = \text{atan2}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ,  $\phi = \pi * \sqrt{\mathbf{u} * \mathbf{u} + \mathbf{v} * \mathbf{v}}$ . The unit vector pointing in the corresponding direction is obtained by rotating  $(0, 0, -1)$  by  $\phi$  degrees around the  $y$  (up) axis and then  $\theta$  degrees around the  $-z$  (forward) axis. If for a direction vector in the world  $(D_x, D_y, D_z)$ , the corresponding  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  coordinate in the light probe image is  $(D_x * r, D_y * r)$  where  $r = (1/\pi) * \text{acos}(D_z) / \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$ .*

# Sampling strategies

---

- Technique (pdf) 1:  
**BRDF importance sampling**
  - Generate directions with a pdf proportional to the BRDF
- Technique (pdf) 2:  
**Environment map importance sampling**
  - Generate directions with a pdf proportional to  $L(\omega)$  represented by the EM

# Sampling strategies





# Vzorkování směrů podle mapy prostředí

- Intenzita mapy prostředí definuje hustotu (pdf) na jednotkové kouli
- Pro účely vzorkování ji aproximujeme jako 2D diskrétní distribuci nad pixely mapy
- Pravděpodobnost výběru pixelu je dána součinem
  - Intenzity pixelu
  - Velikostí pixelu na jednotkové kouli (závisí na mapování)
- Detaily viz. Writeup / PBRT